PAP 2.1
Versuch 221: "Adiabatenkoeffizient"

Jonas Schweer

3. April 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
- 1.1 Ziel des Versuchs . . . 2
- 1.2 Versuchsaufbau . . . 2
- 1.3 Physikalische Grundlagen . . . 3
  - 1.3.1 Messung nach Clément und Desormes . . . 3
  - 1.3.2 Messung nach Rüchard . . . 4

2 Messprotokoll **5**

3 Auswertung **8**
- 3.1 Berechnung nach Clément und Desormes . . . 8
- 3.2 Methode nach Rüchard . . . 8

4 Zusammenfassung und Diskussion **9**

1 Einleitung

Anmerkung: Alle Bilder, welche in diesem Abschnitt verwendet wurden, sind aus dem Praktikumsskript übernommen worden.
Quelle: 'Physikalisches Praktikum PAP2.2 für Studierende der Physik B.Sc' - Jens Wagner, Februar 2025

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch wollen wir den Adiabatenkoeffizienten für Luft und für Argon bestimmen. Diese beiden sollen in einem Versuchsteil mit der Methode nach Rüchard bestimmt werden. In einem anderen bestimmen wir den Koeffizienten von Luft erneut, diesmal aber mit der Methode nach Clément und Desormes.

1.2 Versuchsaufbau

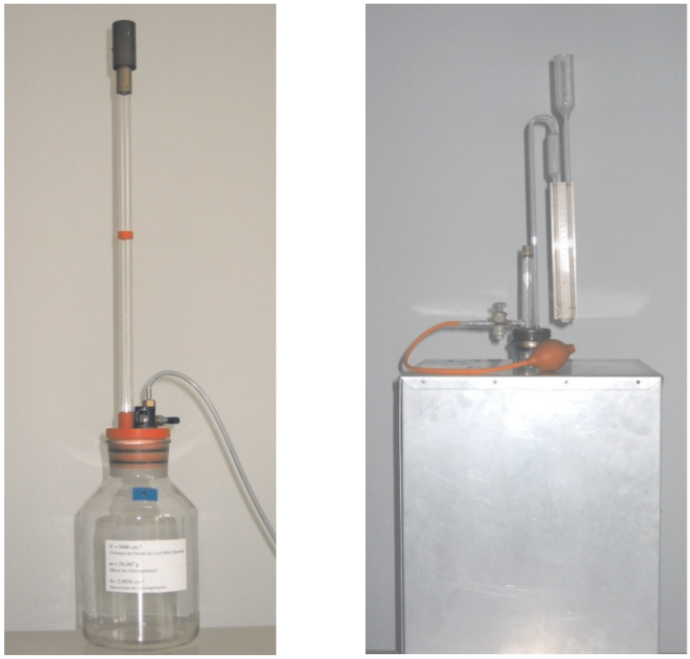


Abbildung 1: Bild der Versuchsaufbauten

Links in Abbildung 1 ist die Methode nach Rüchard gezeigt. Dieser besteht aus einem Gasbehälter mit einem Rohransatz und Nadelventil. Das Nadelventil ist mit einer Gasflasche verbunden. Die Gasflasche ist mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt (bei uns Argon oder Luft). An dem Rohransatz ist ein Glasrohr angebracht, in welchem ein zylindrischer Schwingkörper platziert ist. Die Schwingung von diesem werden wir mit einer Stoppuhr vermessen.
Rechts ist der Aufbau nach Clément und Desormes gezeigt. In dem Kasten bedinfet sich ein Gasbehälter mir einem Manometeraufsatz (hier durch Höhenmessung der Flüssigkeit in dem U-Rohr). Ausserdem ist ein Luftbalg angeschlossen, mit welchem wir den Druck erhöhen können.

Für beide Versuchsteile liegt außerdem ein Thermometer bei, mit dem wir die Temperatur festhalten können.

1.3 Physikalische Grundlagen

1.3.1 Messung nach Clément und Desormes

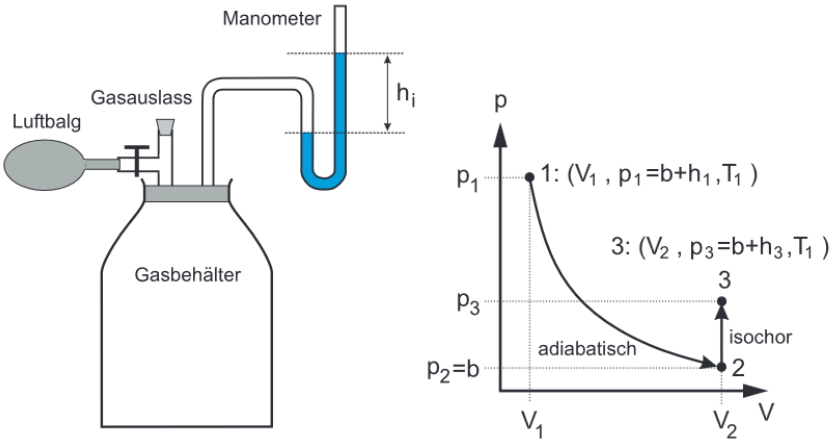


Abbildung 2: Aufbau mit pV-Diagramm

In Abbildung 2 ist nochmal der Aufbau der Messung dargestellt und rechts davon das zugehörige pV-Diagramm mit den jetzt besprochenen Zuständen. Im ersten Schritt pumpen wir mit dem Luftbalg, um den Druck in dem Gasbehälter zu erhöhen. Dabei erwärmt sich das Gas, sodass wir warten müssen, bis es wieder abgekühlt ist, um Zustand 1 zu erhalten:

$$\textbf{Zustand 1:} V_1,\ p_1 = b + h_1,\ T_1 \tag{1}$$

Dabei sind V_1, p_1 T_1 das momentane Volumen, der momentane Druck und die momentane Temperatur des Gases. b ist der äußere Luftdruck und h_1 die Höhendifferenz des Manometers.
Um nun zu Zustand 2 zu gelangen, öffnen wir eine kurze Zeit den Gasauslass. Es strömt Gas aus dem Behälter, bis der Druck in ihm dem äußeren Druck b angeglichen ist. Dabei ändert sich zwar die Gasmenge, jedoch kann man es auch Volumenvergrößerung um ein Volumen ΔV ansehen, durch welche der Druck auf b sinkt. Dabei handelt es sich aufgrund der Schnelligkeit des Druckausgleichs um einen Adiabatischen Prozess, bei dem die Temperatur des Gases um ΔT abkühlt. Der Zustand ist nun also:

$$\textbf{Zustand 2:} V_2 = V_1 + \Delta V,\ p_2 = b,\ T_2 = T_1 - \Delta T \tag{2}$$

Für Zustand 3 lassen wir das Gas nun wieder Raumtemperatur annehmen. In dieser isochoren Zustandsänderung steigt nun der Druck wieder an. Bei Zimmertemperatur ist der Zustand 3 dann:

$$\textbf{Zustand 3:} V_3 = V_2 = V_1 + \Delta V,\ p_3 = b + h_3,\ T_3 = T_1 \tag{3}$$

Da Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$ eine adiabatische Zustandsänderung darstellt, sind sie über die Adiabatengleichungen verknüpft, insbesondere:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \tag{4}$$
$$(b + h_1) V_1^\kappa = b(V_1 + \Delta V)^\kappa \tag{5}$$

Wenn $\Delta V \ll V_1$, so kann man eine folgende Näherung durchführen:

$$(V_1 + \Delta V)^\kappa \approx V_1^\kappa \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_1}\right) \tag{6}$$

In Formel (5) eingesetzt, erhalten wir den Zusammenhang:

$$\frac{h_1}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V} \tag{7}$$

Wir wissen, dass in Zustand 1 und Zustand 3 die Temperatur gleich ist. Demnach folgt aus $pV = nRT$, dass $pV = \text{const.}$ gelten muss. Also:

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 \tag{8}$$
$$(b + h_1) V_1 = (b + h_3)(V_1 + \Delta V) \tag{9}$$

Daraus folgt Näherungsweise:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{h_1 - h_3}{b} \tag{10}$$

Setzen wir das nun in Formel (7) ein, können wir den Adiabatenkoeffizienten κ folgendermaßen berechnen:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \tag{11}$$

1.3.2 Messung nach Rüchard

Auf den Schwingkörper innerhalb des Rohres wirken mehrere Kräfte. Er befindet sich im Gleichgewicht, wenn der Druck p in der Gasflasche gleich dem Luftdruck p_0 plus dem Schweredruck des Körpers $\frac{mg}{A}$ ist. Also:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} \tag{12}$$

Wenn wir den Schwingkörper nun eine Distanz x aus dieser Gleichgewichtslage auslenken, ändert sich der Druck p in der Gasflasche:

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = A \, \mathrm{d}p \tag{13}$$

Dieser Vorgang ist Adiabatisch, und so gilt:

$$pV^\kappa = \text{const.} \tag{14}$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}p = -\kappa \frac{p}{V} \mathrm{d}V \tag{15}$$

Das eingesetzt in Formel (13) ergibt das:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -A\kappa\frac{p}{V}\mathrm{d}V \tag{16}$$

Mit $\mathrm{d}V = Ax = \pi r^2 x$ folgt die Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV}x = 0 \tag{17}$$

Die Lösung hiervon ist ein harmonischer Oszillator mit Kreisfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV}} \tag{18}$$

Daraus lässt sich die Periodendauer bestimmen als:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{4mV}{r^4 \kappa p}} \tag{19}$$

Umgestellt kann man den Adiabatenkoeffizienten also berechnen mit:

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p} \tag{20}$$

2 Messprotokoll

Messprotokoll 221: Adiabatenkoeffizient

11.03.25
Harish Mahendran
Jonas Schweer

Messinstrumente:

A1: - Gasbehälter mit Manometeraufsatz und Luftbalg

A2: - Gasbehälter mit Rohransatz und Nadelventil
- Glasrohr mit zylindrischem Schwingkörper
- Stoppuhr
- Gasflaschen mit Argon und mit Luft

Aufgabe 1: Messung nach Clément und Desormes

Wir erzeugen einen Überdruck im Gasbehälter und warten, bis er auf Raumtemperatur ist. Wir notieren den Druck h_1. Anschließend öffnen wir kurz den Gasauslass und warten erneut Ausgleich auf Zimmertemperatur ab. Wir notieren h_3. Das Wiederholen wir 5 mal.

	Messung	1	2	3	4	5
links	h_1 [cm]	57,3	57,3	57,1	54,9	53,5
	h_3 [cm]	58,8	58,8	58,7	58,2	58,0
rechts	h_1 [cm]	61,2	61,3	61,5	63,6	65,0
	h_3 [cm]	59,8	59,8	59,8	60,5	60,6

Fehler: $\pm 0{,}2$ cm

Tabelle 1: Druckmessung nach Clément und Desormes

$\vartheta = (21{,}7 \pm 0{,}5)\,^\circ C$

Aufgabe 2: Messung nach Rüchard

Wir stellen einen Druck von 0,4 bar ein und versuchen die Schwingung möglichst mittig zu platzieren. Wir notieren die Werte des Aufbaus:

Ag: $m = (26,116 \pm 0,002)\,g$
$V = (5370 \pm 5)\,cm^3$
$2r = (15,95 \pm 0,02)\,mm$

Luft: $m = (26,006 \pm 0,002)\,g$
$V = (5460 \pm 5)\,cm^3$
$2r = (15,97 \pm 0,05)\,mm$

Wir messen die Zeit für 50 Perioden:

$T_{Ag,1} = 47,48\,s$ $\quad T_{Ag,2} = 46,45\,s$ $\quad T_{Ag,3} = 46,65$

$T_{Luft,1} = 50,76\,s$ $\quad T_{Luft,2} = 50,70\,s$ $\quad T_{Luft,3} = 50,65$

$\Delta T = 0,3\,s$

$\vartheta = (22,2 \pm 0,5)°C$

$p = (990,7 \pm 0,3)\,mbar$

11.03.25

3 Auswertung

3.1 Berechnung nach Clément und Desormes

In diesem Teil wollen wir Formel (11) nutzen, um aus den gemessenen Höhen den Adiabatenkoeffizienten zu bestimmen. Dafür müssen wir zuerst die Höhendifferenzen bestimmen:

$$h_1 = h_{1,\text{rechts}} - h_{1,\text{links}} \tag{21}$$

$$h_3 = h_{3,\text{rechts}} - h_{3,\text{links}} \tag{22}$$

$$\Delta h_n = \sqrt{2}\,\Delta h_{n,\text{links/rechts}} \tag{23}$$

Den Fehler haben wir über Gauß berechnet, und schon eingefügt, dass $\Delta h_{n,\text{links}} = \Delta h_{n,\text{rechts}}$
Mit diesen h_n können wir nun Formel (11) nutzen, und so für jede Messung den Adiabatenkoeffizient bestimmen. Der Fehler dieser Formel lautet:

$$\Delta\kappa = \frac{1}{(h_1 - h_3)^2}\sqrt{(h_3\Delta h_1)^2 + (h_1\Delta h_3)^2} \tag{24}$$

Die Ergebnisse sind:

Messung	h_1 [cm]	h_3 [cm]	κ
1	3.90 ± 0.28	1.00 ± 0.28	1.34 ± 0.10
2	4.00 ± 0.28	1.00 ± 0.28	1.33 ± 0.09
3	4.40 ± 0.28	1.10 ± 0.28	1.33 ± 0.08
4	8.70 ± 0.28	2.30 ± 0.28	1.36 ± 0.04
5	11.50 ± 0.28	2.60 ± 0.28	1.29 ± 0.03

Tabelle 1: Ergebnisse der Höhenmessung

Berechnen wir nun den gewichteten Mittelwert nach Formeln:

$$\bar{\kappa} = \frac{\sum_i \frac{\kappa_i}{(\Delta\kappa_i)^2}}{\sum_i \frac{1}{(\Delta\kappa_i)^2}} \tag{25}$$

$$\Delta\bar{\kappa} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{(\Delta\kappa_i)^2}}} \tag{26}$$

Und erhalten so als Adiabatenkoeffizienten:

$$\boxed{\kappa_{\text{Luft}} = 1.318 \pm 0.022}$$

3.2 Methode nach Rüchard

Um die Methode nach Rüchard zu verwenden, müssen wir zunächst den Gesamtdruck, der auf den Schwingkörper wirkt mit Formel 12 berechnen. Der Fehler des Drucks ist

dann:

$$\Delta p = \sqrt{(\Delta p_0)^2 + \left(\frac{g}{\pi r^2}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{2mg}{\pi r^3}\Delta r\right)^2} \tag{27}$$

Wir erhalten für die Luftmessung und die Argonmessung zwei unterschiedliche Werte, führen die Berechnung allerdings trotzdem parallel durch. Die Werte sind:

$$\boxed{p_{\text{Luft}} = (100340 \pm 30)\text{Pa}}$$
$$\boxed{p_{\text{Ag}} = (100350 \pm 30)\text{Pa}}$$

Als nächstes berechnen wir von unseren gemessenen Periodendauern den Mittelwert. Die Formel dafür, sowie der Fehler bei N Messungen lautet wie folgt:

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3} \tag{28}$$

$$\Delta\bar{T} = \frac{\Delta T}{\sqrt{N}} \tag{29}$$

Die erhaltenden Werte müssen wir anschließend noch durch 50 Teilen, da wir 50 Perioden gemessen haben. Dann erhalten wir jeweils:

$$\boxed{\bar{T}_{\text{Luft}} = (1.014 \pm 0.003)\text{s}}$$
$$\boxed{\bar{T}_{\text{Ag}} = (0.937 \pm 0.003)\text{s}}$$

Mit diesen Werten, und den Daten aus dem Messprotokoll können wir nun Formel (20) nutzen, um den Adiabatenkoeffizienten sowohl für Luft als auch für Argon zu bestimmen. Der Fehler ist dabei nach Gauß:

$$\Delta\kappa = \kappa\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 +} \tag{30}$$

Die Koeffizienten lauten:

$$\boxed{\kappa_{\text{Luft}} = 1.354 \pm 0.019}$$
$$\boxed{\kappa_{\text{Ag}} = 1.573 \pm 0.014}$$

4 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem haben wir ein mal den Adiabatenkoeffizienten für Argon und zwei Mal für Luft bestimmt. Dabei haben wir uns zwei verschiedene Verfahren zu nutze gemacht: Ein mal die Berechnung nach Clément und Desormes und einmal die Berechnung nach Rüchard. Für Luft haben wir beide Methoden einmal verwendet, für Argon nur Letztere.
Die Literaturwerte für die beiden Koeffizienten können wir aus einer Tabelle auf Seite 34 des Praktikumsskripts entnehmen. Für Luft nehmen wir dabei Näherungsweise den

für Stickstoff (78% Stickstoffgehalt in der Luft und so)

$\boxed{\kappa_{\text{Luft,lit}} \approx 1.401}$
$\boxed{\kappa_{\text{Ag,lit}} \approx 1.648}$

Der erste Versuchsteil war der, bei dem wir durch eine Höhendifferenzmessung auf den Adiabatenkoeffizienten von Luft geschlossen haben. Dabei erhielten wir einen Wert von:

$\boxed{\kappa_{\text{Luft},1} = 1.318 \pm 0.022}$

Nutzen wir folgende Formel:

$$\sigma = \frac{|x - y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \tag{31}$$

um die Sigma-Abweichung des Wertes vom Literaturwert zu bestimmen, so erhalten wir eine Abweichung von:

$\boxed{\sigma_{\text{Luft},1/\text{lit}} = 3.8}$

Wir erhalten also eine durchaus signifikante Abweichung, welche vermutlich nicht auf statistische Schwankungen zurückzuführen ist. Ein möglicher 'Fehler', welcher uns auch gegen Ende der Durchführung aufgefallen ist, ist, dass in den ersten 3 Messungen den Anfangsdruck recht klein gewählt haben. Dadurch, dass wir die Starthöhe der Flüssigkeit nicht hoch genug angesetzt haben, wird am Ende auch die Höhendifferenz recht klein sein (in Messung 1 war sie für h_1 noch 3.9 cm, während sie in Messung 5 11.5 cm war, also fast drei mal so viel). Dadurch werden vor allem kleine Ableseungenauigkeiten wesentlich Stärker ins Gewicht fallen. Durch die Höhe des Messrohres wurde es ebenfalls erschwert, den Höhenwert genau abzulesen.
Im zweiten Versuchsteil haben wir durch Periodendauermessung eines Schwingkörpers den Adiabatenkoeffizienten sowohl von Luft als auch von Argon schließen können. Unsere Werte lauteten:

$\boxed{\kappa_{\text{Luft},2} = 1.354 \pm 0.019}$
$\boxed{\kappa_{\text{Ag},2} = 1.573 \pm 0.014}$

Die Abweichungen lauten hier nach selber Formel:

$\boxed{\sigma_{\text{Luft},2/\text{lit}} = 2.5}$
$\boxed{\sigma_{\text{Ag},2/\text{lit}} = 5.4}$ Wir sehen also auch hier relativ große Abweichungen. Auch hier scheint also ein systematischer Fehler aufgetreten zu sein. Gut vorstellbar wäre, dass beim Zählen der Schwingungen der Fehler passiert ist. 50 Schwingungen sicher und konsistent zu zählen, war für mich zumindest nicht so leicht wie es sich im ersten Moment anhört (vor allem früh am morgen). Es ist also gut möglich, dass wir aus Versehen 51 oder 49 Schwingungen gezählt haben. Zum Beispiel die erste Zeitmessung von Argon hat eine ganze Sekunde Differenz zu den anderen Beiden. Das könnte eine mögliche Fehlerquelle sein. Ansonsten könnte auch die Dämpfung des Systems ein Problem gewesen

sein, allerdings wäre uns davon beim Durchführen des Versuches nichts aufgefallen, da durch das kleine Auslassloch an der Röhre die Dämpfung schon sehr stark unterdrückt wurde.
Überraschend ist, dass beide Werte für κ_{Luft} ungefähr gleichstark in die gleiche Richtung falsch liegen. Untereinander haben diese beiden Messungen 'nur' eine Abweichung von $\sigma = 1.2$. Dass lies mich im ersten Moment vermuten, dass wir eine externe Größe, wie zum Beispiel den Luftdruck falsch protokolliert haben. Da wir aber in Teil 1 keine externen Größen gebraucht haben, sondern nur die Höhendifferenz, welche in Teil 2 komplett irrelevant wurde, gibt es keine Größe, die für beide Versuche ausschlaggebend war. Der einzig hier noch denkbare gemeinsame Nenner ist, dass beide Ergebnisse mit dem Wert von Stickstoff, und nicht mit dem von Luft speziell verglichen wurde. Da aber knapp 99% der Luft aus Stickstoff und Sauerstoff besteht, und Sauerstoff auch im Bereich $\kappa \approx 1.4$ liegt, wird die Annäherung mit $\kappa_{\text{Luft}} \approx 1.401$ schon sinnvoll gewesen sein. Es ist also auch möglich, dass die Ergebnisse rein zufällig in die gleiche Richtung daneben liegen.
Bei einer erneuten Versuchsdurchführung würde ich also zum einen die Höhendifferenzen bei Versuchsteil 1 größer werden lassen, um so die Ablesefehler zu minimieren. (Die Skala niedriger platzieren wäre sicherlich auch nützlich :)). Den zweiten Versuchsteil würde ich vor Allem ausgeschlafener und ohne Ablenkungen durchführen, um so keine Zählfehler zu machen. Zudem würde ich vielleicht noch mehr Messungen durchführen, um so falsche Zeiten leichter identifizieren zu können.